Temps et relativité restreinte

Activités

1 Et « l'éther » s'évapora... (p. 210)

1 Le texte illustre une démarche scientifique car le scientifique :
– émet une hypothèse (l'existence de l'éther) ;
– applique des lois qui justifient cette hypothèse (lois de la mécanique galiléenne appliquées à la lumière dans le cas de l'existence de l'éther) ;
– met en place une ou plusieurs expériences pour vérifier son hypothèse (utilisation du phénomène d'interférences pour détecter un écart de durée) ;
– interprète les résultats obtenus (l'observation est non conforme aux prévisions. La figure d'interférences reste la même quelle que soit l'orientation de l'interféromètre) ;
– réitère plusieurs fois l'expérience (elle donne toujours les mêmes résultats).

L'échec de l'expérience, selon les prévisions de A. MICHELSON et E. MORLEY, a permis de remettre en cause les hypothèses de travail et a donc permis l'émergence d'une nouvelle théorie.

2 La théorie de la relativité restreinte est en contradiction avec les conceptions de la mécanique galiléenne, car elle considère que la vitesse de la lumière est invariante, c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas du référentiel d'étude.

Ces deux théories ne sont pas incompatibles, car l'application de la relativité restreinte à des systèmes à faible vitesse permet de retrouver les conclusions de la mécanique galiléenne.

3 La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels.

Remarque 1 : l'invariance de la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide s'applique dans tous les référentiels galiléens.

Remarque 2 : l'expérience de A. MICHELSON et E. MORLEY confirme l'invariance de la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide dans tous les référentiels galiléens, ou du moins ne l'infirme pas.
D'autres expériences confirment ce résultat, comme l'observation d'étoiles doubles (voir exercice 23, p. 224 du manuel).
En 1964, ALVÄGER a apporté une autre preuve en mesurant la valeur de la vitesse des photons émis lors de la désintégration de particules se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière. Il a montré que ces photons se déplacent à la vitesse de la lumière ; la composition des vitesses ne s'applique pas pour la lumière (voir exercice 24, p. 225 du manuel).

2 ... lorsque la relativité arriva (p. 211)

1 $\Delta t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{10 \times 10^3}{0{,}998 \times 3{,}00 \times 10^8} = 3{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s} = 33\ \mu\text{s}$

Pour parcourir 10 km, les muons mettent 33 µs ; on retrouve bien le résultat annoncé dans le texte.

2 La distance parcourue par le muon en 2,2 µs est :

$d = v \cdot \Delta T_0 = 0{,}998 \times 3{,}00 \times 10^8 \times 2{,}2 \times 10^{-6}$
$d = 6{,}6 \times 10^2$ m.

Cette distance est très faible devant l'épaisseur de 10 km d'atmosphère à traverser par les muons pour atteindre le sol. D'après la mécanique classique, les muons n'ont pas le temps d'atteindre la Terre.

3 **a.** Pour ces muons :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}998^2}} = 15{,}8.$$

b. $\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0 = 15{,}8 \times 2{,}2 \times 10^{-6}$
$\Delta T' = 35 \times 10^{-6}\ \text{s} = 35\ \mu\text{s}$

La durée de vie moyenne d'un muon mesurée sur Terre est de 35 µs.

c. La durée de vie du muon, pour un observateur terrestre, devient 15,8 fois plus grande que dans le référentiel lié au muon, d'où l'expression « dilatation des durées ».

d. $\Delta T' > 33$ µs, donc les muons formés dans la haute atmosphère peuvent atteindre le sol.

4 La mécanique galiléenne ne peut pas expliquer l'observation de muons sur Terre. Le modèle de relativité restreinte a permis, par la dilatation des durées, d'expliquer cette observation.

3 « Être à l'heure pour se situer » (p. 212-213)

1 La localisation par GPS est basée sur la triangulation. Les satellites GPS envoient des bips avec l'heure de départ du bip et la position du satellite. Le récepteur GPS calcule la distance qui le sépare de chaque satellite. Il en déduit sa position par l'intersection d'au moins quatre sphères (chaque sphère a pour rayon la distance entre le satellite concerné et le récepteur GPS, elle est centrée sur le satellite). Les horloges des satellites et du récepteur GPS doivent être synchronisées.

2 Si les horloges des satellites et du récepteur GPS ne sont pas synchronisées, les mesures de distances seront fausses.

3 Si les horloges sont synchronisées, la durée de l'aller est égale à la durée du retour :

$$t_2 - t_1 = t'_1 - t_2 \quad \text{d'où} \quad t_2 = \frac{t_1 + t'_1}{2}$$

4 **a.** Les deux horloges des balises B_1 et B_2 sont synchronisées et le promeneur P reçoit les signaux simultanément avec leur date d'émission.
P sait que la balise B_2 a émis un signal 1 ms avant la balise B_1. P en déduit qu'il est plus près de B_1 que de B_2.
L'écart de distance $PB_2 - PB_1$ est égal à 1 ms × *v*, avec *v* la valeur de la vitesse de propagation des signaux.

b. $PB_2 - PB_1 = 1{,}00 \times 10^{-3} \times 3{,}00 \times 10^8$ (1)

$= 3{,}00 \times 10^5$ m,

$PB_2 + PB_1 = 900$ km $= 9{,}00 \times 10^5$ m. (2)

(1) + (2) donne $2PB_2 = 12{,}00 \times 10^5$ m,

d'où : $PB_2 = 6{,}00 \times 10^5$ m.

De l'équation (1), par exemple, on déduit que :

$PB_1 = 3{,}00 \times 10^5$ m.

c. Le promeneur connaît la distance qui le sépare de la balise B_2.
Dans le signal provenant de cette dernière, il y a la date *t* de son émission.
P le reçoit à la date *T'* indiquée par sa montre.

Si $T' = t + \frac{PB_2}{v}$, alors sa montre est synchronisée avec l'horloge de la balise B_2.

Si $T' > t + \frac{PB_2}{v}$, alors la montre avance par rapport à l'horloge et elle retarde si $T' < t + \frac{PB_2}{v}$.

5 **a.** $\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ avec ΔT_0 la durée propre entre l'émission de deux signaux consécutifs mesurée par l'horloge embarquée dans un satellite située à proximité de l'émetteur et $\Delta T'$ la durée entre l'émission des deux signaux consécutifs mesurée par l'horloge terrestre.

b. $\Delta T' > \Delta T_0$ (car $\gamma > 1$), donc l'horloge embarquée dans le satellite indique une date antérieure à celle affichée par l'horloge terrestre. Le retard a pour expression :

$$\Delta T' - \Delta T_0 = (\gamma - 1) \cdot \Delta T_0$$

c. Au bout de 24 heures le retard est de :

$$(\Delta T' - \Delta T_0) \times 24 \times 3600 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3{,}9 \times 10^3)^2}{(3{,}00 \times 10^8)^2}}} - 1\right) \times 24 \times 3600$$

$$= 7{,}3 \times 10^{-6}\ \text{s}.$$

d. Le résultat confirme les 7 µs de retard annoncées dans le texte.

6 **a.** Le bilan des phénomènes de relativités restreinte et générale conduit à une avance de 45 – 7 = 38 µs par cycle de 24 heures.

b. En multipliant cette avance par la valeur de la vitesse de la lumière, on obtient une erreur au bout de 24 heures de :

$$38 \times 10^{-6} \times 3{,}00 \times 10^8 = 11 \times 10^3\ \text{m} = 11\ \text{km}.$$

Si on ne corrige pas cet effet, il s'ensuit une erreur de positionnement de 11 km au bout de 24 h.

Exercices (p. 217-227)

QCM

1 1. A ; 2. C ; **2** 1. B ; 2. C ; 3. C ; 4. A ; 5. B ; **3** 1. A et C ; 2. B.

Application immédiate

4 Définir la notion de durée propre et exploiter la relation entre durée propre et durée mesurée

$$\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0 = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}51 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}95c}{c}\right)^2}} = 8{,}0 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

$$= 8{,}0\ \mu\text{s}$$

La durée de vie mesurée de cette particule dans le référentiel (R) est de 8,0 µs.

Pour commencer

5 Connaître l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide

1. On postule que la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tout référentiel galiléen.
2. Le premier physicien à l'avoir énoncé est A. EINSTEIN.

6 Connaître la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide

1. La valeur de la vitesse de la lumière dans le vide, avec trois chiffres significatifs, est égale à $3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}.

2. La valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est aujourd'hui connue de façon exacte.
Elle est fixée à $2{,}997\,924\,58 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

7 Attribuer les principes

a. En mécanique classique, le temps est *absolu* et la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est *relative*. C'est la mécanique d'*Isaac Newton*.

b. En relativité restreinte, le temps est *relatif* et la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est *absolue*. C'est la mécanique d'*Albert Einstein*.

8 Comprendre la relation entre durée propre et durée mesurée

1. La durée propre ΔT_0 est mesurée par une horloge fixe dans un référentiel galiléen (R) et telle que les événements se déroulent au même endroit et à proximité de cette horloge.
La durée mesurée $\Delta T'$ est mesurée par des horloges fixes et synchronisées dans un référentiel galiléen (R').
Les deux référentiels et, par conséquent, les horloges sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre.
Dans (R'), les deux événements ne se produisent pas au même endroit.

2. Puisque v et c sont positifs et que $v < c$, le rapport $\frac{v}{c}$ et son carré sont compris entre 0 et 1.
$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$ est donc compris entre 0 et 1 ainsi que sa racine carrée. Enfin, l'inverse d'un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à 1.
γ est donc supérieur à 1.

3. L'observateur en mouvement par rapport aux événements mesure une durée $\Delta T'$ supérieure à la durée propre ΔT_0 puisque $\gamma > 1$. On parle ainsi de durée dilatée mesurée par cet observateur.

9 Étudier un électron dans le tube cathodique d'un téléviseur

1. De la formule de γ, on peut tirer v :

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow v = c \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

2. $v = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8 \times \sqrt{1-\frac{1}{1{,}05^2}}$

$v = 9{,}14 \times 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

La valeur de la vitesse de déplacement de l'électron dans un référentiel terrestre est de $9{,}14 \times 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

10 Exploiter le coefficient γ

1. L'astronaute en mouvement par rapport à la Terre ne peut pas être proche des deux événements. La durée séparant les deux événements est donc, pour l'astronaute, une durée mesurée.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}80\times c}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}80)^2}} = 1{,}7$$

La durée mesurée $\Delta T'$ par l'astronaute est égale à 1,7 fois la durée propre ΔT_0.

2. Lorsque la durée mesurée est doublée par rapport à la durée propre, $\gamma = 2$.
De la formule de γ, on peut tirer v :

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow v = c \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$
$$v = c \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = 0{,}87 \times c$$

L'astronaute doit se déplacer à une vitesse de valeur $v = 0{,}87 \times c$ pour que la durée qu'il mesure entre deux événements soit doublée par rapport à la durée propre sur Terre.

11 Exploiter la relation entre durée propre et durée mesurée

1. Vu de la Terre, ce voyage a duré :

$$\Delta T' = \frac{d}{v} = \frac{\text{durée du trajet} \times c}{0{,}90 \times c} = 4{,}4 \text{ ans.}$$

2. Pour l'astronaute :

$$\Delta T_0 = \frac{\Delta T'}{\gamma} = \Delta T' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$\Delta T_0 = \Delta T' \cdot \sqrt{1-\frac{0{,}90^2 c^2}{c^2}} = 1{,}9 \text{ an.}$$

12 Distinguer physique classique ou relativité restreinte

La théorie 1 correspond au postulat B et la théorie 2 au postulat A.

13 Étudier le vol d'un pigeon

Les touristes ne doivent pas utiliser la relativité restreinte pour l'étude du vol d'un pigeon, car ce dernier se déplace avec une vitesse de valeur très faible comparée à celle de la lumière.

Pour s'entraîner

14 La relativité du temps

1. Les deux événements dont on cherche à mesurer la durée qui les sépare sont les passages de l'OVNI au-dessus de Bordeaux et d'Arcachon.

2. Dans le référentiel de la soucoupe, les deux événements sont proches de l'horloge embarquée dans l'OVNI. La durée mesurée par l'extraterrestre est une durée propre.

3. Les horloges synchronisées et fixes dans un référentiel terrestre qu'utilise Nicolas pour mesurer la durée séparant les passages de l'OVNI au-dessus de Bordeaux et d'Arcachon indiquent une durée mesurée. En effet, ces horloges sont en mouvement par rapport à celle qui mesure la durée propre.

$$\Delta T' = \frac{d}{v} = \frac{d}{\frac{2}{3}c} = \frac{3 \times 49 \times 10^3}{2 \times 3{,}00 \times 10^8} = 2{,}5 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

Nicolas mesure une durée de survol égale à $2{,}5 \times 10^{-4}$ s.

4. $\Delta T_0 = \dfrac{\Delta T'}{\gamma} = \Delta T' \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{d}{v} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$

$$\Delta T_0 = \frac{3 \times 49 \times 10^3}{2 \times 3{,}00 \times 10^8} \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1{,}8 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

La durée propre du survol de l'OVNI mesurée par l'extraterrestre est $\Delta T_0 = 1{,}8 \times 10^{-4}$ s.

15 Une période variable

1. Les deux événements à considérer pour étudier la période d'un signal lumineux sont les émissions consécutives de deux signaux lumineux.

2. La période propre de ce signal lumineux est celle mesurée à bord de la fusée :

$$\Delta T_0 = \frac{1}{f} = \frac{1}{5{,}0} = 0{,}20\ \text{s.}$$

3. La période mesurée par l'ami resté sur Terre est :

$$\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0, \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta T' = \frac{0{,}20}{\sqrt{1 - \dfrac{(250\,000 \times 10^3)^2}{(3{,}00 \times 10^8)^2}}} = 0{,}36\ \text{s.}$$

16 À chacun son rythme

1. La durée mesurée par l'horloge correspond à la durée entre le passage de la sonde au niveau du Soleil et son arrivée dans la nébuleuse de la Lyre. Ces deux événements sont proches de l'horloge située à bord de la sonde. La durée ΔT_S est donc une durée propre.

2. La durée ΔT_R est une durée mesurée avec :

$$\Delta T_R = \gamma \cdot \Delta T_S \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Dans cette formule, v est la valeur de la vitesse relative des horloges, c'est-à-dire la vitesse de la sonde dans le référentiel héliocentrique.

3. $\Delta T_R = \dfrac{d_R}{v}$

4. $\Delta T_R = \gamma \cdot \Delta T_S = \dfrac{\Delta T_S}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ et $\Delta T_R = \dfrac{d_R}{v}$

Il vient $\dfrac{\Delta T_S}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{d_R}{v}$

En élevant le tout au carré, on obtient :

$$\frac{\Delta T_S^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{d_R^2}{v^2}$$

En isolant la vitesse, il vient : $v = \dfrac{d_R \cdot c}{\sqrt{\Delta T_S^2 \cdot c^2 + d_R^2}}$

Avec $d_R = 42 \times 10^3$ années de lumière que l'on convertit en mètre, $\Delta T_S = 20000$ ans que l'on convertit en seconde et $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}, on trouve :

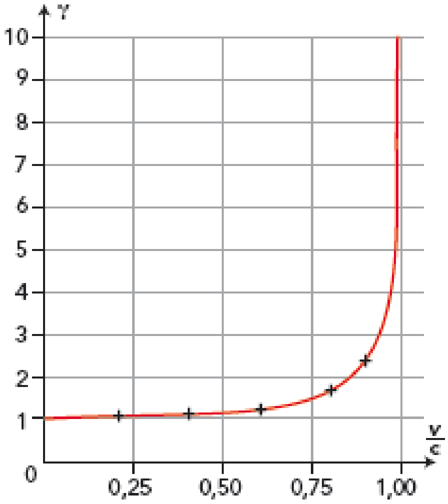
$$v = 2{,}7 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

17 Relativité es-tu là ?

1.

$\frac{v}{c}$	0	0,200	0,400	0,600	0,800	0,900	0,99
γ	1	1,02	1,09	1,25	1,67	2,29	10,0

2.



3. On convertit v en m · s^{-1}. On obtient ainsi le rapport $\dfrac{v}{c} = 1{,}14 \times 10^{-6}$.

Le point représentatif est quasiment confondu avec l'ordonnée à l'origine : $\gamma = 1$.

Puisque $\gamma = 1$, il n'y a pas d'effet relativiste et la mécanique classique convient.

4. a. Pour une augmentation de 10 % des durées :

$$\Delta T' = \Delta T_0 + 10\,\% \cdot \Delta T_0 = 1{,}10\ \Delta T_0 ; \quad \gamma = 1{,}1.$$

b. On lit dans le tableau : $\dfrac{v}{c} = 0{,}40$ pour $\gamma = 1{,}1$.

Alors $v = 0{,}40 \times c = 1{,}2 \times 10^5$ km · s^{-1}.

5. Les effets relativistes sont longtemps passés inaperçus, car ils ne se manifestent de manière sensible que pour des vitesses de valeurs très élevées. En deçà, la précision des horloges et chronomètres ne permettait pas de détecter la dilatation des durées.

18 Expérience de Bertozzi

1. a. Le travail $W(\vec{F})$ d'une force électrique $\vec{F}$ vaut :

$$W(\vec{F}) = q \cdot U$$

On peut dire que des joules sont homogènes à des coulombs multipliés par des volts.

L'énergie cinétique $\mathscr{E}_c$ est égale à $\dfrac{1}{2}\, m \cdot v^2$.

Donc les joules sont homogènes à des kg · m^2 · s^{-2}.

$\sqrt{\dfrac{e \cdot U}{m}}$ s'exprime en $\sqrt{\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}}}$ soit m · s^{-1}.

Cette expression est bien homogène à une vitesse, d'où la formule $v_c = \sqrt{\dfrac{2e \cdot U}{m}}$.

b.

U (V)	v_c (m · s^{-1})
$1{,}00 \times 10^2$	$5{,}93 \times 10^6$
$1{,}00 \times 10^3$	$1{,}87 \times 10^7$
$1{,}00 \times 10^4$	$5{,}93 \times 10^7$
$1{,}00 \times 10^5$	$1{,}87 \times 10^8$
$1{,}00 \times 10^6$	$5{,}93 \times 10^8$
$1{,}00 \times 10^7$	$1{,}87 \times 10^9$

2. Les valeurs expérimentales confirment les prévisions de la mécanique classique pour les plus faibles valeurs de la vitesse des électrons.

3. La limite est la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide, soit $3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4. La mécanique classique n'est plus utilisable pour les particules dont la valeur de la vitesse est élevée ($v > 0{,}14 \times c$). Il faut alors travailler en mécanique relativiste.

19 Incertitude ou relativité restreinte ?

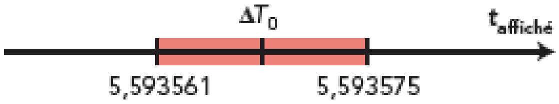
1. D'après la formule de dilatation des durées, l'écart entre les durées mesurée et propre s'écrit :

$$\Delta T' - \Delta T_0 = (\gamma - 1) \cdot \Delta T_0$$

2. a. $U(\Delta T_0) = 0{,}0001\ \% \times 5{,}593\,568 + 0{,}0014 \times 10^{-3}$

$U(\Delta T_0) = 7 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$

b.



c. L'écart minimal entre ΔT_0 et $\Delta T'$ doit être :

$$(\Delta T' - \Delta T_0)_{min} = 7 + 7 + 1 = 15\ \mu\mathrm{s}.$$

3. D'après les questions précédentes, il vient :

$$(\gamma - 1) \cdot \Delta T_0 = (\Delta T' - \Delta T_0)_{min}$$

d'où : $$\gamma = \frac{(\Delta T' - \Delta T_0)_{min}}{\Delta T_0} + 1$$

$$\gamma = \frac{15 \times 10^{-6}}{5{,}593568} + 1 = 1{,}00000268.$$

Remarque : le résultat est indiqué avec neuf chiffres significatifs pour ne pas trouver une valeur nulle pour v dans la question suivante.
On peut également s'arrêter pour γ à la première décimale non nulle, soit $\gamma = 1{,}000003$.

4. a. $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. On en déduit :

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 3{,}00 \times 10^8 \times \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}000\,002\,68^2}}$$

$v = 6{,}95 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Un tel type de chronomètre est capable de repérer la dilatation des durées en relativité restreinte si les deux chronomètres se déplacent l'un par rapport à l'autre dans des référentiels galiléens avec une vitesse de valeur au moins égale à $6{,}95 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b. Un avion se déplace à une vitesse très inférieure à $6{,}95 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Deux amis, l'un immobile sur Terre et l'autre dans l'avion, ne peuvent pas mettre en évidence la dilatation du temps avec ce type de chronomètre.

5. La précision d'une horloge atomique permet de mettre en évidence la dilatation du temps pour des valeurs de vitesses relatives entre les deux horloges beaucoup plus faibles que $6{,}95 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

20 Quand les durées se dilatent

1. Pour mesurer une durée propre, l'observateur muni d'un chronomètre doit être proche des deux événements dont il mesure la durée qui les sépare. L'observateur O_1 est proche du départ de la lumière du miroir inférieur et de son retour. Il mesure donc une durée propre.

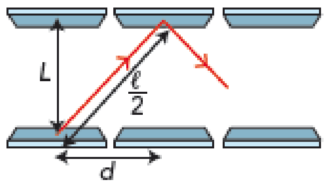
2. a. Pour O_1, fixe par rapport à l'horloge de lumière, la lumière parcourt la distance 2 L lors d'un aller-retour.

b. La valeur c de la vitesse de la lumière étant constante, on a :

$$c = \frac{2L}{\Delta T_0} \qquad \text{soit } L = \frac{c \cdot \Delta T_0}{2}$$

3. a. Pendant une aller simple de la lumière, l'astronef parcourt la distance $d = \dfrac{v \cdot \Delta T'}{2}$.

b.



c. Le schéma fait apparaître un triangle rectangle pour lequel $\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = d^2 + L^2$, soit :

$$\ell = 2\sqrt{d^2 + L^2}$$

4. a. $\ell = c \cdot \Delta T'$

b. On a :

$$\ell = c \cdot \Delta T' \qquad (1)$$
$$\ell = 2\sqrt{d^2 + L^2} \qquad (2)$$
$$L = \frac{c \cdot \Delta T_0}{2} \qquad (3)$$
$$d = \frac{v \cdot \Delta T'}{2} \qquad (4)$$

Avec (1) et (2), on peut écrire :

$$c \cdot \Delta T' = 2\sqrt{d^2 + L^2}$$

En remplaçant L et d par leurs expressions, il vient :

$$c \cdot \Delta T' = 2\sqrt{\left(\frac{v \cdot \Delta T'}{2}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \Delta T_0}{2}\right)^2}$$

En élevant au carré :

$$c^2 \cdot \Delta T'^2 = v^2 \cdot \Delta T'^2 + c^2 \cdot \Delta T_0^2$$
$$c^2 \cdot \Delta T_0^2 = (c^2 - v^2) \cdot \Delta T'^2$$

$$\Delta T' = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} \cdot \Delta T_0 = \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta T_0$$

$$\Delta T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta T_0 = \gamma \cdot \Delta T_0 \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

5. $v < c$, donc $\dfrac{v}{c} < 1$.

v et c sont des valeurs positives, donc $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$

On en déduit que $1 - \dfrac{v^2}{c^2} < 1$, d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} > 1, \quad \text{donc } \gamma >$$

$\Delta T'$ est donc toujours supérieur à ΔT_0, d'où le titre « Quand les durées se dilatent ».

21 Chérie, j'ai rétréci la navette

1. Bill muni d'un chronomètre est situé dans un référentiel galiléen. Il mesure la durée séparant les événements E_1 et E_2 qui se déroulent au-dessus de sa tête, donc proches de lui. Il mesure une durée propre.

2. $L_2 = v \cdot \Delta T_0$ et $L_1 = v \cdot \Delta T'$

3. $\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0$

$$L_2 = v \cdot \frac{\Delta T'}{\gamma} = \frac{L_1}{\gamma}$$

4. a. La navette est immobile dans un référentiel lié à Boule. C'est donc ce dernier qui mesure une longueur propre nommée ici L_1.

b. La longueur L_2, mesurée par Bill, est plus petite que la longueur L_1, mesurée par Boule, car $L_2 = \frac{L_1}{\gamma}$ et $\gamma > 1$. Les longueurs se contractent.

5. Longueur de la navette mesurée par Bill :

$$L_2 = \frac{L_1}{\gamma} = L_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}90)^2}{c^2}}$$

$$L_2 = 30 \times \sqrt{1 - 0{,}90^2} = 13 \text{ m}.$$

La longueur de la navette mesurée par Bill est de 13 m.

22 How GPS bends time ?

Traduction du texte :

« Einstein savait de quoi il parlait à propos de cette histoire de relativité. Pour preuve, il suffit de regarder votre GPS. Le système de positionnement global repose sur un ensemble de 24 satellites qui transmettent des informations horodatées sur l'endroit où ils sont. Votre appareil GPS enregistre l'heure exacte à laquelle il reçoit cette information depuis chaque satellite et calcule ensuite la durée mise par le signal pour arriver. En multipliant le temps écoulé par la vitesse de la lumière, on peut trouver la distance qui le sépare de chaque satellite, comparer ces distances, et calculer sa propre position. Pour une exactitude de quelques mètres, les horloges atomiques des satellites doivent être extrêmement précises – plus ou moins 10 nanosecondes. C'est ici que les choses deviennent étranges : ces horloges, extrêmement précises, ne semblent jamais fonctionner correctement. Une seconde mesurée sur le satellite ne correspond jamais à une seconde mesurée sur Terre – tout comme l'avait prédit Einstein.
Selon la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, une horloge qui se déplace rapidement semble fonctionner plus lentement pour une personne immobile. Les satellites se déplacent à environ 9 000 miles par heure – suffisamment pour que les horloges embarquées ralentissent de 8 microsecondes par jour par rapport à un récepteur GPS et brouillent totalement les données de localisation. Pour contrer cet effet, le système GPS ajuste l'heure indiquée par les satellites en utilisant l'équation ci-dessous. »

1. Le GPS d'une voiture, par exemple, enregistre l'heure à laquelle il reçoit un signal provenant d'un des 24 satellites. Connaissant le temps de parcours du signal et sa vitesse de propagation, le GPS calcule la distance qui le sépare du satellite. Il effectue cette opération avec plusieurs satellites afin de déterminer sa position exacte sur Terre.

2. La distance qui sépare le GPS d'un satellite est d'autant plus précise que la durée du parcours de l'onde électromagnétique est déterminée avec une grande précision. Il faut des horloges très précises, des horloges atomiques.

3. La relativité restreinte d'EINSTEIN explique que les horloges embarquées dans les satellites battent à un rythme plus lent qu'une horloge terrestre, d'où un décalage (retard) de 8 µs par jour.

4. Les valeurs des vitesses apparaissent sous forme de rapport dans l'équation de dilation des durées. Il suffit donc que ces valeurs aient la même unité, des miles par seconde par exemple.

Si l'horloge d'un satellite GPS mesure une durée propre de 24 h, $\Delta T_0 = 24 \times 3600$ s. Une horloge terrestre mesure :

$$\Delta T' = \gamma \cdot \Delta T_0 = \frac{24 \times 3\,600}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{9\,000}{3\,600}\right)^2}{186\,262^2}}} = 86\,400{,}000\,007\,8 \text{ s},$$

soit une avance de 7,8 µs par rapport à l'horloge embarquée dans le satellite. Inversement, l'horloge du satellite affiche un retard de 7,8 µs par rapport à une horloge terrestre.

Pour aller plus loin

23 Le test des étoiles doubles

1. Le postulat d'EINSTEIN pour la relativité restreinte dit que la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens.

2. D'après la loi classique de composition des vitesses, la personne fixe dans un référentiel terrestre voit la balle lancée par l'enfant A arriver avec une vitesse dont la valeur v_1 est égale à celle v_A du lancer de l'enfant par rapport au manège plus celle v_m du manège par rapport au sol ($v_1 = v_A + v_m$).
Au contraire, la balle provenant de l'enfant B arrive vers la personne avec une vitesse de valeur $v_2 = v_A - v_m$.
C'est donc la balle provenant de l'enfant A qui arrive en premier à la personne.

3. Les effets relativistes ne se font sentir que pour des valeurs de vitesse non négligeables devant c.
La loi classique de composition des vitesses s'applique donc ici pour les balles.

4. N'ayant pas observé d'images brouillées lors de l'expérience, on peut conclure que, dans le référentiel de l'observateur terrestre, la lumière émise par chaque étoile s'est propagée à une vitesse ayant la même valeur dans le vide. Le postulat d'EINSTEIN est en accord avec ces observations.

24 Le test des pions

1. La source des photons gamma sont les pions neutres.

2. Dans (R), les pions neutres se déplacent à une vitesse de valeur égale à $0{,}99975 \times c$.

3. a. En construisant les deux vecteurs $\vec{v}_{\text{photon/source}}$ et $\vec{v}_{\text{source/Terre}}$, avec, ici, des vecteurs colinéaires de même sens, on obtient une valeur de $1{,}99975 \times c$ pour $\vec{v}_{\text{photon/Terre}}$.

b. De même, les vecteurs étant colinéaires et de sens opposés, on obtient une valeur de $0{,}00025 \times c$ pour $\vec{v}_{\text{photon/Terre}}$.

4. a. ALVÄGER mesure la valeur d'une vitesse avec une précision de $10^{-5} \times c$. L'expérience donne une valeur de c pour $\vec{v}_{\text{photon/Terre}}$, ce qui est en désaccord avec la mécanique classique. En effet, les résultats de la question 3 montrent que l'on aurait dû obtenir des valeurs bien différentes de c.

b. Cette expérience est en accord avec l'invariance de la valeur c de la vitesse de la lumière dans le vide. Elle n'infirme pas la théorie de la relativité restreinte.

25 La quantité de mouvement relativiste

1. Si $v << c$, alors $\frac{v^2}{c^2} \approx 0$ et γ tend vers 1 ;

$$\vec{p}_{relat.} = m \cdot \vec{v}$$

On retrouve l'expression classique de la quantité de mouvement.

2. En remplaçant $p_{relat.}$ et $p_{clas.}$ par leurs expressions, on peut écrire :

$$\gamma \cdot m \cdot v - m \cdot v \leqslant \frac{m \cdot v}{100}$$

Il vient : $\gamma \leqslant \frac{1}{100} + 1$ et $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geqslant \frac{100}{101}$

d'où : $v \leqslant c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{100}{101}\right)^2} = 0{,}14 \times c = v_{max}$

Si $v \leqslant v_{max} = 0{,}14 \times c$, les quantités de mouvement en mécanique relativiste et en mécanique newtonienne diffèrent d'au plus 1 %.

26 L'énergie relativiste

1. En combinant les relations proposées, on a :

$$\mathscr{E}^2 = \gamma^2 \cdot m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4 = \gamma^2 \cdot m^2 \cdot c^4\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$\mathscr{E}^2 = \gamma^2 \cdot m^2 \cdot c^4\left(\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \gamma^2 \cdot m^2 \cdot c^4$$

Il vient : $\mathscr{E} = \gamma \cdot m \cdot c^2$

2. $\mathscr{E} = \gamma \cdot m \cdot c^2 = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_c + m \cdot c^2$

Donc : $\mathscr{E}_c = \gamma \cdot m \cdot c^2 - m \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$

3. a. Si la particule a une masse nulle, alors :

$$\frac{\mathscr{E}}{\gamma} = m \cdot c^2 = 0$$

b. Comme l'énergie d'une particule a une valeur finie, γ tend vers l'infini.

c. Si γ tend vers l'infini, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ tend vers 0,

donc $\frac{v^2}{c^2}$ tend vers 1 et $v = c$.

La valeur de la vitesse de ces particules de masse nulle est égale à c dans le vide.

4. a. $\mathscr{E} = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$.

b. L'énergie relativiste d'une particule de masse m a pour expression :

$$\mathscr{E}^2 = p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4$$

Pour un photon de masse nulle, cette énergie s'écrit :

$$\mathscr{E} = p \cdot c$$

c. Pour un photon : $p = \frac{\mathscr{E}}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

C'est l'expression de de Broglie (voir le chapitre 15).

Retour sur l'ouverture du chapitre

27 La vitesse de la lumière et EINSTEIN dépassés par une particule ?

1. Le postulat d'EINSTEIN indique que la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est la plus grande valeur de vitesse que l'on puisse atteindre.

2. a. Un neutrino est une particule neutre de masse pratiquement nulle.

b. Temps mis par la lumière pour parcourir cette distance :

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{730\,085}{2{,}997\,924\,58 \times 10^8} = 2{,}435\,30 \times 10^{-3}\ \text{s}.$$

Un neutrino met $\Delta t = \Delta T' - 60\ \text{ns} = 2{,}435\,24 \times 10^{-3}$ s pour parcourir cette distance.

c. Incertitude de 10 milliardièmes de seconde sur Δt, donc $U(\Delta t) = 1 \times 10^{-8}$ s.

$$2{,}435\,23 \times 10^{-3}\ \text{s} < \Delta t < 2{,}435\,25 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

3. $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{730\,085}{2{,}435\,24 \times 10^{-3}} = 2{,}998\,00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$U(v) = v \cdot \sqrt{\left(\frac{U(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{U(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= 2{,}998\,00 \times 10^8 \times \sqrt{\left(\frac{1}{730\,085}\right)^2 + \left(\frac{10^{-8}}{2{,}435\,24 \times 10^{-3}}\right)^2}$$

$$= 1{,}3 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$2{,}997\,99 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} < v < 2{,}998\,01 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Avec la précision de la mesure, la valeur de la vitesse du neutrino est bien supérieure à celle de la vitesse de la lumière dans le vide.

5. D'après EINSTEIN :

$$\Delta T' = \Delta T_0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Or, si $v > c$, alors $1 - \frac{v^2}{c^2} < 0$,

donc $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ n'existe pas.

γ ne peut pas être calculé. La relativité restreinte est remise en cause.

6. Une découverte expérimentale doit être vérifiée par plusieurs mesures avec des méthodes et des instruments différents pour être validée.

Comprendre un énoncé

28 Je suis en retard ! en retard ! en retard !

1. La valeur de la vitesse relative du Lapin n'est pas négligeable devant c : des effets relativistes vont avoir lieu. Les durées mesurées par le Lapin et la Reine sont ainsi liées par la relation de dilatation des durées. Puisque, ici, $\gamma \approx 2{,}3$, la Reine mesure une durée plus grande que le Lapin, d'où son courroux.

2. Alice n'est pas en mouvement par rapport à la Reine ; elle mesure la même durée qu'elle. Autrement dit, entre Alice et la Reine, $\gamma = 1$. Il n'y a pas de dilatation des durées et Alice ne contredira pas la Reine.

3. Pour éviter de courroucer la Reine, il faut un décalage minimal entre la durée propre et la durée mesurée. Ceci est possible si la valeur de la vitesse relative v devient négligeable devant c ($v < 0{,}14 \times c$). Dans ce cas, γ tend vers 1 et $\Delta T'$ tend vers ΔT_0. Le lapin aurait mieux fait de ne pas aller si vite !

4. Grâce à ce type d'horloge, le Lapin mesurera le temps très précisément, ce qui peut l'aider à gérer ses retards. Cependant, les effets relativistes comme la dilatation des durées affectent toutes les horloges.