Travail expérimental - Correction

Mouvement d'un projectile

Application des lois de Newton et de Kepler

Comprendre

1- Objectifs

Les objectifs de ce travail sont de:

- Savoir enregistrer expérimentalement la trajectoire d'un projectile et exploiter le document obtenu
- Déterminer l'équation de la trajectoire d'un projectile lancé dans l'air.
- Tracer des vecteurs vitesse et accélération
- Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération
- Trouver les conditions initiales.

2- Etude théorique

Le projectile (système) se déplaçant dans le référentiel Terrestre peut être soumis à diverses forces (poids, poussée d'Archimède, forces de frottement fluides, etc.). Toutefois, on ne tiendra compte ni de la poussée d'Archimède, ni de la force de frottement fluide exercée sur le projectile. La seule force qui agit est le poids du corps.

On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre où l'application du théorème du centre d'inertie donne:

$$\vec{P}=m.\vec{g}=m.\vec{a}$$

C'est-à-dire:

$$\vec{a}=\vec{g}$$

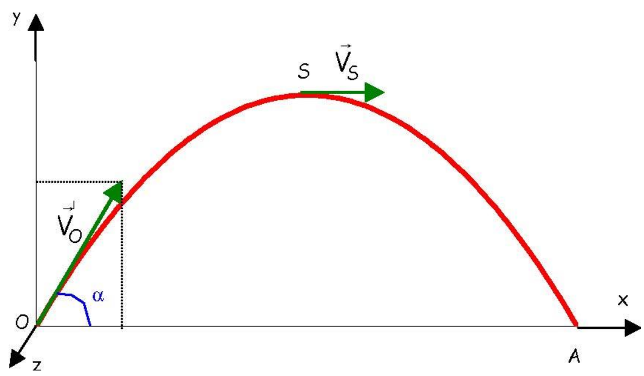
Le mouvement se faisant dans une petite région l'accélération est constante vectoriellement. En conséquence, l'accélération ne dépend ni de la masse de l'objet, ni de la manière dont il a été lancé.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G, qui est repérée à chaque instant par ses coordonnées dans le repère (0; x, y, z) orthonormé.

On suppose que le projectile part de l'origine O du repère à l'instant initial t = 0 avec la vitesse $\vec{V_0}$.

On aura pour la position initiale: $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$.

Et pour la vitesse initiale: $V_{0x}=V_0.\cos\alpha$, $V_{0y}=V_0.\sin\alpha$, $V_{0z}=0$.



En projection dans le repère précédent (O; x, y, z) on obtient successivement:

Axe	Accélération	Vitesse	Position
Ox	$a_x=0$	$v_x=V_0.\cos\alpha$	$x(t)=V_0.\cos\alpha.t$
Oy	$a_y=-g$	$v_y=-g.t+V_0.\sin\alpha$	$y(t)=-\frac{1}{2}.g.t^2+V_0.\sin\alpha.t$
Oz	$a_z=0$	$v_z=0$	$z(t)=0$

Les composantes x(t), y(t) et z(t) sont les équations horaires paramétriques du mouvement.

Le mouvement d'un projectile peut s'interpréter comme la composition de deux mouvements, l'un horizontal et l'autre vertical.
En effet, selon l'axe Ox, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse constante de valeur $V_0.\cos\alpha$ et selon l'axe Oy, le mouvement est celui d'une chute libre verticale de vitesse initiale de valeur $V_0.\sin\alpha$.
On remarquera que la cote z du centre d'inertie G est constamment nulle.

La trajectoire du centre d'inertie G du projectile s'effectue donc dans le plan z = 0.
Pour obtenir l'équation cartésienne y = f(x) de la trajectoire on élimine la variable temps t.
On obtient ainsi l'équation:

$$y=-\frac{1}{2}.\frac{g}{V_0^2.\cos\alpha^2}x^2+\tan\alpha.x$$

Dans le référentiel terrestre, la trajectoire du centre d'inertie G d'un projectile, contenue dans le plan défini par la verticale et la direction de la vitesse initiale, est un arc de parabole.

La flèche est l'altitude maximale atteinte ($H = y_S$). Cette altitude correspond au sommet S de la trajectoire.
En S le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ est horizontal. La composante verticale de la vitesse est donc nulle ($V_{yS} = 0$), d'où:

$$V_{yS}=-g.t_S+V_0.\sin\alpha=0$$

On en déduit l'instant t_S correspondant à la flèche:

$$t_S=\frac{V_0.\sin\alpha}{g}$$

En reportant cette valeur dans l'équation donnant la position $y(t_S)$ on obtient:

$$H=y_S=y(t_S)=-\frac{1}{2}.g.t_S^2+V_0.\sin\alpha.t_S=-\frac{1}{2}.g.\left(\frac{V_0.\sin\alpha}{g}\right)^2+V_0.\sin\alpha.(\frac{V_0.\sin\alpha}{g})$$

C'est-à-dire:

$$H=\frac{V_0^2.\sin\alpha^2}{2.g}$$

Il faut remarquer que l'on peut retrouver cette valeur en remarquant que la dérivée de la fonction y = f(x) s'annule pour la valeur de l'abscisse x_S de la flèche.

La portée est le point d'abscisse maximale atteint ($D = x_A$). Cette portée correspond à une valeur nulle de composante suivant l'axe Oy de la position ($y_A = 0$).
On a donc en ce point A la relation:

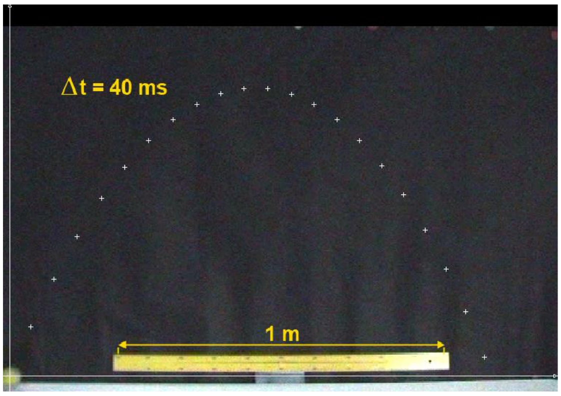
$$y_A=-\frac{1}{2}.\frac{g}{V_0^2.\cos\alpha^2}.x_A^2+\tan\alpha.x_A=0$$

D'où la valeur de la portée:

$$D=x_A=\frac{2.V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}=\frac{V_0^2.\sin2\alpha}{g}$$

3- Traitement d'un document vidéo

On s'intéresse au mouvement d'une balle lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$.faisant un angle α par rapport à l'horizontale.
En utilisant le logiciel Latis Pro et en suivant les explications données lors de la séance, relever les différentes positions (x et y) de la balle en fonction du temps t.
Une fois l'acquisition effectuée, enregistrer le fichier sous le nom "Lancer parabolique - Balle".
Le pointage réalisé avec Latis Pro permet de réaliser la chronophotographie de cette expérience.



4- Exploitation des résultats

Afficher la courbe y=f(x). A quoi correspond cette courbe?

La courbe y=f(x) correspond à la trajectoire spatiale de la balle

A l'aide de l'outil "modélisation", modéliser cette courbe par la fonction "y(x)=-1/2*a*x^2+b*x".

$$y(x) = -\frac{1}{2}\times 3{,}23.x^2 + 2{,}40.x$$

Que peut-on en déduire quant au type de trajectoire?

La trajectoire de la balle est parabolique puisque l'équation précédente est celle d'une parabole.

Afficher l'évolution temporelle de la position x=f(t) puis grâce à l'outil "modélisation", modéliser cette courbe par la fonction "x(t)=a*t".

$$x(t)=1{,}77.t$$

Quelle est la nature du mouvement de la balle suivant l'axe Ox?

Le mouvement de la balle suivant l'axe Ox est un mouvement rectiligne uniforme.

Que représente la valeur a?

La valeur a représente la vitesse initiale V_{Ox} de la balle suivant l'axe Ox.

En déduire la valeur de la vitesse V_{0x} suivant l'axe Ox?

$$V_{0x} = 1{,}77 m.s^{-1}$$

Afficher l'évolution temporelle de la position y=f(t) puis grâce à l'outil "modélisation", modéliser cette courbe par la fonction "y(t)=1/2*a*t^2+b.t".

$$y(t) = -\frac{1}{2}\times 9{,}80.t^2 + 4{,}16.t$$

Quelle est la nature du mouvement de la balle suivant l'axe Oy.

Le mouvement de la balle suivant l'axe Oy est un mouvement parabolique. Suivant la verticale la balle monte avec en ralentissant, atteint le sommet de sa trajectoire, puis retombe en accélérant.

Que représente la valeur b?

La valeur b représente la vitesse initiale V_{Oy} de la balle suivant l'axe Oy.

En déduire la valeur de la vitesse V_{0y} suivant l'axe Oy?

$$V_{0y} = 4{,}16 m.s^{-1}$$

Que représente la valeur a?

La valeur a représente l'accélération de la balle suivant l'axe Oy. C'est l'accélération de la pesanteur.

En déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur g suivant l'axe Oy?

$$g = 9{,}80 m.s^{-2}$$

Comparer cette valeur avec la valeur couramment admise g_0=9,81m.s^{-2}.

L'erreur relative commise dans cette évaluation est:

$$\text{Erreur} = 100\times\frac{9{,}80-9{,}81}{9{,}81} = 0{,}1\%$$

Notre valeur est donc tout à fait correcte. Les possibles causes d'erreurs seraient des problèmes de pris de vue, d'étalonnage de la longueur de référence ou de pointage.

En utilisant les valeurs V_{0x} et V_{0y} calculer la valeur de la vitesse initiale V_0 de la balle?

$$V_0 = \sqrt{V_{0x}^2+V_{0y}^2} = \sqrt{1{,}77^2+4{,}16^2} = 4{,}52 m.s^{-1}$$

En utilisant l'outil dérivée, dériver la fonction y(t) puis faire une régression linéaire. Que représente cette droite?

Lorsqu'on dérive la fonction y(t) on obtient la composante verticale de la vitesse $v_y=-g.t+V_0.\sin\alpha$. Lorsqu'on procède à une régression linéaire on trouve une droite d'équation $v_y=-9{,}80.t+4{,}16$.

En déduire la valeur de g.

$$g = 9{,}80 m.s^{-2}$$

En utilisant les valeurs V_{0x} et V_{0y} calculer la valeur de la tangente puis de l'angle α entre l'horizontale et le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$?

$$\tan\alpha = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \frac{4{,}16}{1{,}77} = 2{,}35$$

$$\alpha = 67°$$

Quelle est la valeur H de la flèche de cette trajectoire?

$$H = \frac{V_0^2.\sin\alpha^2}{2.g} = \frac{4{,}52^2\times(\sin 67°)^2}{2\times 9{,}80} = 0{,}88m$$

Quelle est la valeur de la portée de cette trajectoire?

$$D = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g} = \frac{4{,}52^2\times(\sin 2\times 67°)}{9{,}80} = 1{,}50m$$

Conclure.

D'après le graphique: la valeur de l'angle est de 67°; la valeur de la flèche est de 0,89m; la valeur de la portée est de 1,50m. On peut constater que le modèle théorique choisi est correct.